

A. Măsurare și eroare de măsură

Legile fizicii sînt relații matematice între anumite mărimi fizice. La baza cunoașterii acestor legi stă operația de măsurare a mărimilor fizice.

Prin măsurarea unei mărimi fizice se înțelege, așa cum s-a arătat la § 5.1 operația prin care se determină valoarea acelei mărimi prin compararea ei cu o mărime de aceeași natură, care devine astfel unitate de măsură.

Măsurările pot fi însă de două feluri: *directe*, cînd se compară direct mărimea de măsurat cu etalonul unității, cum este măsurarea unei lungimi cu o riglă, sau a unei mase cu ajutorul balanței etc. și *indirecte* cînd valoarea mărimii de măsurat se obține cu ajutorul unei formule, în care intervin mărimi care sînt măsurate direct. De exemplu densitatea unui corp de formă paralelipedică se calculează cu ajutorul formulei
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc}$$
 în care masa se determină prin cîntărire, iar volumul V prin înmulțirea dimensiunilor a , b și c .

Se observă însă că la repetarea aceeași măsurări, în condiții identice, se obțin valori diferite, diferențele fiind în general mici. Aceasta ne arată că măsurările sînt numai aproximativ exacte, ele fiind întotdeauna afectate de anumite erori, care reprezintă abateri față de valoarea exactă a mărimii căutate.

Erorile de măsură sînt de două feluri: *erori sistematice* și *erori accidentale*.

Erorile sistematice sînt produse de unele defecte de construcție ale aparatelor, de alegerea greșită a metodei de lucru sau uneori de influența unor factori de mediu (temperatură, lumină, umiditate etc.). Ele se produc întotdeauna în același sens și se elimină numai prin înlăturarea cauzelor care le produc. Noi nu ne vom ocupa de ele.

Erorile accidentale sînt determinate de imperfecțiunea simțurilor noastre și de sensibilitatea limitată a aparatelor de măsură. Erorile accidentale nu pot fi eliminate, dar pot fi reduse prin efectuarea unui număr cît mai mare de determinări.

După cum știm instrumentele de măsură sînt prevăzute cu cîte o scală gradată, de obicei, în diviziuni egale. Citirea la instrument se face, observînd coincidența cu diviziunea de pe scală. Astfel, lungimea unui corp se măsoară făcînd să coincidă fiecare extremitate a corpului cu cîte o diviziune a riglei gradate, echilibrul unei balanțe se constată prin coincidența acului indicator cu diviziunea zero, citirea unei temperaturi se face obser-

vind coincidența nivelului mercurului din tubul capilar cu o diviziune a scalei gradate și așa mai departe.

Vom considera *eroare absolută maximă* a unei măsurători, valoarea celei mai mici diviziuni de pe scara aparatului (sau valoarea cea mai mică pe care o putem aprecia). De exemplu când măsurăm timpul cu un cronometru, care indică pe cadran zecimea de secundă, eroarea absolută maximă este 0,1 s. Dacă măsurarea timpului se face cu ajutorul unui ceas de mână cu secundar, eroarea maximă admisibilă este 1 s. O lungime măsurată cu o riglă divizată în milimetri va da o eroare maximă admisibilă de 1 mm.

Dacă notăm cu Δx eroarea absolută maximă, înseamnă că mărimea x poate fi afectată de eroarea:

$$x \pm \Delta x$$

Raportul $\frac{\Delta x}{x}$ se numește *eroare relativă maximă*. Se exprimă, de obicei, în procente și ne indică gradul de precizie ce se poate obține prin metoda și cu aparatele folosite.

Eroarea absolută maximă determină limitele admisibile între care poate să varieze mărimea căutată.

În fizică sînt puține mărimi care se pot măsura direct (lungimea, masa, timpul, intensitatea curentului electric, tensiunea, temperatura etc.). Majoritatea mărimilor fizice se măsoară indirect, datorită dependenței funcționale a mărimilor față de mărimile direct măsurabile. Astfel, dacă mărimea x se măsoară prin intermediul mărimilor a și b , datorită faptului că:

$$x = f(a, b)$$

rezultă că eroarea absolută cu care se va determina mărimea x va depinde de erorile absolute cu care se vor măsura mărimile a și b . Adică:

$$x \pm \Delta x = f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b).$$

Să stabilim acum relațiile pe care trebuie să le folosim la determinarea erorilor maxime admisibile în câteva cazuri mai des întîlnite.

1. *Eroarea făcută asupra unei sume sau diferențe*. Dacă

$$x = a + b \quad (1)$$

atunci:

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b).$$

Efectuînd calculele obținem:

$$\pm \Delta x = \pm \Delta a \pm \Delta b.$$

Va trebui să luăm în considerare cazul cel mai nefavorabil, așa că:

$$\pm \Delta x = \pm (\Delta a + \Delta b), \quad (1')$$

iar eroarea relativă maximă va fi:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}. \quad (1'')$$

La fel vom proceda în cazul unei diferențe. Vom obține:

$$\pm \Delta x = \pm (\Delta a + \Delta b), \quad (2')$$

iar:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}. \quad (2'')$$

2. Eroarea făcută asupra unui produs sau a unei cît. Considerăm cazul în care:

$$x = ab, \quad (3)$$

atunci:

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b),$$

din care, prin efectuarea calculelor și neglijarea produsului $\Delta a \cdot \Delta b$ (deoarece sint mici în raport cu a și b), obținem:

$$\pm \Delta x = \pm b \Delta a \pm a \Delta b$$

și pentru că trebuie să luăm în considerare cazul cel mai nefavorabil vom avea:

$$\pm \Delta x = \pm (b \Delta a + a \Delta b), \quad (3)$$

iar:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{b \Delta a + a \Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}. \quad (3')$$

Dacă:

$$x = \frac{a}{b} \quad (4)$$

atunci:

$$x \pm \Delta x = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} = \frac{(a \pm \Delta a)(b \mp \Delta b)}{(b \pm \Delta b)(b \mp \Delta b)} = \frac{ab \pm b \Delta a \mp a \Delta b \mp \Delta a \cdot \Delta b}{b^2 \mp (\Delta b)^2}$$

în care termenii $\Delta a \cdot \Delta b$ și $(\Delta b)^2$ pot fi neglijăți și luând în considerare cazul cel mai nefavorabil obținem:

$$\pm \Delta x = \pm \left(\frac{b \Delta a \mp a \Delta b}{b^2} \right), \quad (4')$$

iar:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}, \quad (4'')$$

adică aceeași valoare ca în cazul unui produs.

3. Eroarea făcută în cazul unei puteri și a unei rădăcini. Să luăm în considerare cazul cel mai simplu:

$$x = a^2 \quad (5)$$

în acest caz:

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a)^2 = a^2 \pm 2a \Delta a + (\Delta a)^2,$$

de unde:

$$\pm \Delta x = \pm 2a \Delta a, \quad (5')$$

iar:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2a \Delta a}{a^2} = 2 \frac{\Delta a}{a}. \quad (5'')$$

Dacă luăm în considerare cazul general când:

$$x = a^n \quad (6)$$

atunci eroarea relativă maximă va fi dată de relația:

$$\frac{\Delta x}{x} = n \frac{\Delta a}{a}, \quad (6'')$$

iar pentru un produs de puteri:

$$x = a^n \cdot b^m \quad (7)$$

vom obține:

$$\frac{\Delta x}{x} = n \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b}. \quad (7'')$$

În cazul unei rădăcini vom observa că:

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad (8)$$

așa că:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n} \frac{\Delta a}{a}. \quad (8'')$$

Aplicarea calculului erorilor la determinările experimentale este întotdeauna edificatoare. El ne permite să stabilim precizia cu care s-au făcut măsurările și ne indică numărul de zecimale la care trebuie să ne limităm când exprimăm *valoarea* măsurată a mărimii.

Pentru exemplificare să luăm în considerare operațiunea de determinare a densității unui corp solid. Determinăm densitatea unui corp, măsurînd, prin cîntărire, masa m a corpului și masa m' a unui volum egal de apă distilată, deoarece:

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ și } \rho' = \frac{m'}{V}, \text{ de unde } \rho = \frac{m}{m'} \cdot \rho'.$$

Dacă exprimăm densitatea în g/cm³, atunci densitatea apei $\rho' = 1$ g/cm³.

Efectuînd mai multe măsurători găsim, de exemplu, următoarele valori:

Numărul determinării	m	m'	ρ
1	42,8	5,4	7,926
2	42,2	5,5	7,673
3	42,5	5,6	7,589
Media	42,5	5,5	7,7293

Eroarea relativă maximă e dată de relația (4''):

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta m'}{m'}.$$

Dacă folosim o balanță școlară obișnuită, cea mai mică masă pe care o putem cîntări este 0,1 g, așa că:

$$\Delta m = \Delta m' = 0,1.$$

Pentru m și m' alegem valorile medii:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{0,1}{42,5} + \frac{0,1}{5,5} = 0,0206 \approx 0,02$$

(luăm în considerare numai prima zecimală semnificativă).

Aceasta ne arată că precizia determinării este de 2% și că în acest caz, la exprimarea rezultatului, ne putem limita la maximum două zecimale.

Eroarea absolută va fi:

$$\Delta \rho = 0,02 \rho$$

în care pentru ρ luăm tot valoarea medie (pentru că nu cunoaștem valoarea adevărată) și ținând seama că ne vom limita numai la două zecimale vom avea:

$$\Delta \rho = 0,02 \cdot 7,73 = 0,1546 \approx 0,15.$$

De aceea limitele între care poate să varieze valoarea determinată a densității sînt:

$$\rho = 7,73 \pm 0,15 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right).$$

Evident că înmulțind această expresie cu 10^3 exprimăm densitatea în kg/m^3 .